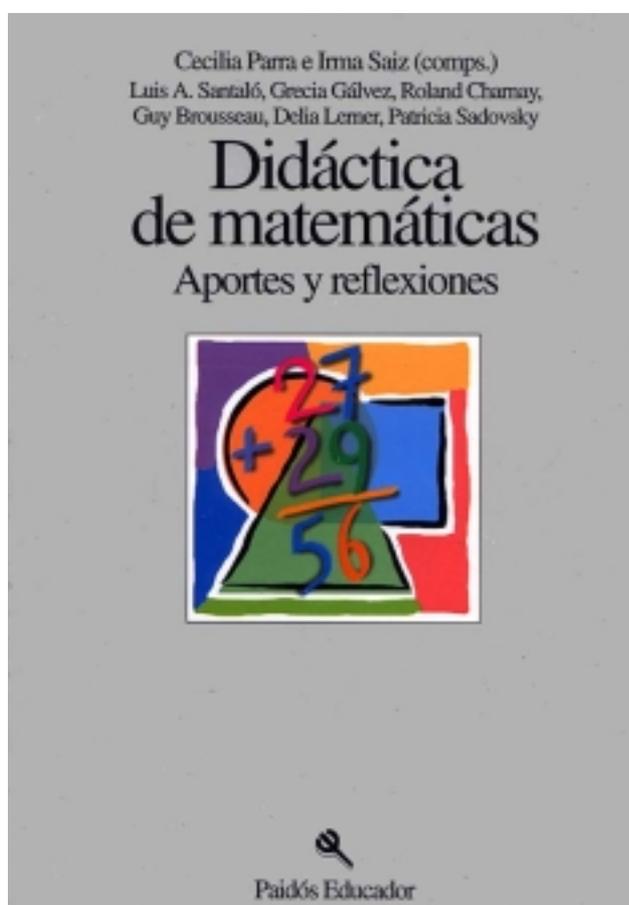


# Didáctica de matemáticas

## Aportes y reflexiones

Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.)



Editorial Paidós Educador

Primera edición, 1994

Quinta reimpresión, 1997  
Buenos Aires

Este material se utiliza con fines  
exclusivamente didácticos

---

## ÍNDICE

Lista de autores.....	9
Prólogo .....	11
1. Matemática para no matemáticos, por Luis A. Santaló .....	21
2. La didáctica de las matemáticas, por Grecia Gálvez.....	39
3. Aprender (por medio de) la resolución de problemas, por Roland Charnay.....	51
4. Los diferentes roles del maestro, por Guy Brousseau .....	65
5. El sistema de numeración: un problema didáctico, por Delia Lemer y Patricia Sadovsky .....	95
6. Dividir con dificultad o la dificultad de dividir, por Ima Saiz.....	185
7. Cálculo mental en la escuela primaria, por Cecilia Parra.....	219
8. La geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental, por Grecia Gálvez.....	273

## CAPÍTULO III. APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS\*

Roland Charnay

*Para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada viene solo, nada es dado. Todo es construido.*  
BACHELARD, *La formación del espíritu científico*

### ¿Lecciones de la historia?

La historia de la matemática, en la complejidad de su evolución y de sus revoluciones, ilustra bien esta cita de Bachelard. Las matemáticas se han construido como respuesta a preguntas que han sido traducidas en otros tantos problemas. Estas preguntas han variado en sus orígenes y en sus contextos: problemas de orden doméstico (división de tierras, cálculo de créditos ... ); problemas planteados en estrecha vinculación con otras ciencias (astronomía, física ... ); especulaciones en apariencia “gratuitas” sobre “objetos” pertenecientes a las matemáticas mismas, necesidad de organizar elementos ya existentes, de estructurarlos, por ejemplo, por las exigencias de la exposición (enseñanza ... ), etcétera.

De más está decir que la actividad de resolución de problemas ha estado en el corazón mismo de la elaboración de la ciencia matemática. “¡Hacer matemática es resolver problemas!”, no temen afirmar algunos.

Pero esta elaboración no se realiza sin dificultad. Los problemas a menudo ofrecen resistencia; las soluciones son casi siempre parciales, aun si destellos geniales provocan avances espectaculares... que a veces no son reconocidos desde el principio. “En el uso frecuente de textos originales y también en el de obras generales –suma de saberes históricamente acumulados en este dominio– hemos descubierto un tejido complejo y difuso hecho de conjeturas, de dudas, de *gaffe*, de modelos concurrentes, de intuiciones fulgurantes y también de momentos de axiomatización y síntesis”, escriben A. Dahan-Dalmedico y J. Peiffer en el prefacio de su libro.

¿Pueden estas consideraciones (muy esquemáticas) sobre el origen del conocimiento matemático y sobre las condiciones de su elaboración encontrar eco en una reflexión sobre la cuestión del aprendizaje matemático en el contexto escolar? La respuesta debe ser prudente y cuidadosa: las herramientas o nociones elaboradas en una época determinada lo han sido, en efecto, en un contexto cultural, socioeconómico..., que no es aquel en el que viven nuestros alumnos. Resta decir que son los problemas que les han dado origen (y los que ha planteado a continuación) los que han dado sentido a las matemáticas producidas. Esta es, tal vez, la principal lección que tener en cuenta en la enseñanza.

### Construir el sentido...

Uno de los objetivos esenciales (y al mismo tiempo una de las dificultades principales) de la enseñanza de la matemática es precisamente que lo que se ha enseñado esté cargado de significado, tenga sentido para el alumno.

Para G. Brousseau (1983),

*el sentido de un conocimiento matemático se define:*

- *no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución,*
- *sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.*

---

\* En *Grand N*, revista de matemática, ciencias y tecnología para los maestros de la escuela primaria y pre-primaria, nº 42, enero 1988, Documento CRDP, Grenoble, Francia. Traducción del francés de Santiago Ruiz en colaboración con Gema Fioriti y María Elena Ruiz, y publicado con autorización del CRDP (Centre Regional de Documentation Pédagogique).

Agreguemos que la construcción de la significación de un conocimiento debe ser considerada en dos niveles:

- un nivel “externo”: ¿cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo?
- un nivel “interno”: ¿cómo y por qué funciona tal herramienta? (por ejemplo, ¿cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado?).

*La cuestión esencial de la enseñanza de la matemática es entonces: ¿cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para el alumno?*

El alumno debe ser capaz no sólo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas.

Y es, en principio, haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas como se permitirá a los alumnos construir el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas.

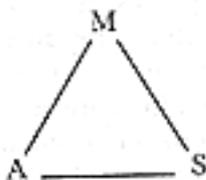
## Estrategia de aprendizaje

Se plantea entonces al docente la elección de una estrategia de aprendizaje. Esta elección (que cada uno hace al menos implícitamente) está influida por numerosas variables: el punto de vista del docente sobre la disciplina enseñada (¿qué es la matemática?, ¿qué es hacer matemática?), su punto de vista sobre los objetivos generales de la enseñanza y sobre aquellos específicos de la matemática, su punto de vista sobre los alumnos (sus posibilidades, sus expectativas), la imagen que el docente se hace de las demandas de la institución (explícitas, implícitas o supuestas), de la demanda social o también de la de los padres...

Para describir algunos modelos de aprendizaje, se puede apoyar en la idea de “contrato didáctico”, tal como Brousseau lo ha definido:

*conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por el alumno, y conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro, y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumnos-saber, definiendo así los roles de cada uno y la repartición de las tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿quién debe hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?...*

Así, una situación de enseñanza puede ser observada a través de las relaciones que se “juegan” entre estos tres polos: maestro, alumno, saber:



analizando:

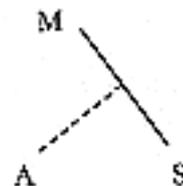
- la distribución de los roles de cada uno,
- el proyecto de cada uno,
- las reglas del juego: ¿qué está permitido, qué es lo que realmente se demanda, qué se espera, qué hay que hacer o decir para “mostrar que se sabe”....?

Muy esquemáticamente se describirán tres modelos de referencia:

### 1. El modelo llamado “normativo” (centrado en el contenido)

Se trata de aportar, de comunicar un saber a los alumnos. La pedagogía es entonces el arte de comunicar, de “hacer pasar” un saber.

- El maestro muestra las nociones, las introduce, provee los ejemplos.
- El alumno, en primer lugar, aprende, escucha, debe estar atento; luego imita, se entrena, se ejercita, y al final aplica.



- El saber ya está acabado, ya construido.

Se reconocen allí los métodos a veces llamados dogmáticos (de la regla a las aplicaciones) o mayeúticos (preguntas/respuestas).

## 2. El modelo llamado "incitativo" (centrado en el alumno)

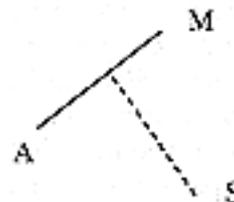
Al principio se le pregunta al alumno sobre sus intereses, sus motivaciones, sus propias necesidades, su entorno.

- El maestro escucha al alumno, suscita su curiosidad, le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus demandas, lo remite a herramientas de aprendizaje (fichas), busca una mejor motivación (medio: cálculo vivo de Freinet, centros de interés de Decroly).

- El alumno busca, organiza, luego estudia, aprende (a menudo de manera próxima a lo que es la enseñanza programada).

- El saber está ligado a las necesidades de la vida, del entorno (la estructura propia de este saber pasa a un segundo plano).

Se reconocen allí las diferentes corrientes llamadas "métodos activos".



## 3. El modelo llamado "aproximativo" (centrado en la construcción del saber por el alumno)

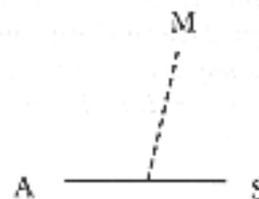
Se propone partir de "modelos", de concepciones existentes en el alumno y "ponerlas a prueba" par mejorarlas, modificarlas o construir nuevas.

- El maestro propone y organiza una serie de situaciones con distintos obstáculos (variables didácticas dentro de estas situaciones), organiza las diferentes fases (investigación, formulación, validación, institucionalización).

- Organiza la comunicación de la clase, propone en el momento adecuado los elementos convencionales del saber (notaciones, terminología).

- El alumno ensaya, busca, propone soluciones, las confronta con las de sus compañeros, las defiende o las discute.

- El saber es considerado con su lógica propia.



*Notemos que ningún docente utiliza exclusivamente uno de los modelos; que el acto pedagógico en toda su complejidad utiliza elementos de cada uno de los modelos..., pero que, a pesar de todo, cada uno hace una elección, consciente o no y de manera privilegiada, de uno de ellos.*

*Agreguemos que el estudio de estos modelos provee una buena herramienta de análisis de las situaciones didácticas y de reflexión para los docentes en formación.*

Tres elementos de la actividad pedagógica se muestran privilegiados para diferenciar estos tres modelos y reflexionar sobre su puesta en práctica:

- El comportamiento del docente frente a los errores de sus alumnos: ¿qué interpretación hace de ellos?, ¿cómo interviene?, ¿para hacer qué?, ¿qué demanda, entonces a sus alumnos?

- Las prácticas de utilización de la evaluación: ¿de qué sirve la evaluación?, ¿en qué momento interviene en el proceso de aprendizaje?, ¿bajo qué formas?

- El rol y el lugar que el maestro asigna a la actividad de resolución de problemas: ¿qué es para él un problema?, ¿cuándo utiliza problemas, en qué momentos del aprendizaje?, ¿con qué fin?

*A continuación, nos interesamos esencialmente en este tercer punto. Para esto, proponemos un esquema, inspirado en un artículo de R. Champagnol (Revue Française de Pédagogie) que resume las diversas posiciones respecto a la utilización de la resolución de problemas en relación con los tres modelos de aprendizaje descritos anteriormente.*

### 1) El problema como criterio del aprendizaje (modelo llamado "normativo")

mecanismos

- lecciones (adquisición)
- ejercicios (ejercitación)

sentidos

- problemas (utilización de los conocimientos para el alumno, control para el maestro)

– lo que conduce a menudo a estudiar tipos de problemas: confrontado a un nuevo problema, el alumno busca si ya ha resuelto uno del mismo tipo.

– es el modelo de referencia de numerosos manuales, siendo la idea subyacente que es necesario partir de lo fácil, de lo simple, para acceder a lo complejo, y que un conocimiento complejo puede ser, para el aprendizaje, descompuesto en una serie de conocimientos fáciles de asimilar y que, finalmente, todo aprendizaje debe ir de lo concreto a lo abstracto.

### 2) El problema como móvil del aprendizaje (modelo llamado “incitativo”)

motivación

- situación basada en lo vivido

mecanismo

- aporte de conocimientos
- práctica, ejercicios

resignificación

- problemas

– al principio, se desea que el alumno sea un “demandante activo, ávido de conocimientos funcionalmente útiles”.

– pero las situaciones “naturales” son a menudo demasiado complejas para permitir al alumno construir por sí mismo las herramientas y, sobre todo, demasiado dependientes de “lo ocasional” para que sea tenida en cuenta la preocupación por la coherencia de los conocimientos.

### 3) El problema como recurso de aprendizaje (modelo llamado “apropiativo”)

La resolución de problemas como fuente, lugar y criterio de la elaboración del saber

Acción

- situación-problema (el alumno busca un procedimiento de resolución)

Formulación  
Validación

- formulación-confrontación de los procedimientos, puesta a prueba

- nueva situación con diferentes obstáculos: nuevos procedimientos, etcétera.

institucionalización

- nueva herramienta
- ejercitación
- síntesis, lenguaje convencional
- problemas: evaluación para el maestro, resignificación para el alumno

– es principalmente a través de la resolución de una serie de problemas elegidos por el docente como el alumno construye su saber, en interacción con los otros alumnos.

– la resolución de problemas (y no de simples ejercicios) interviene así desde el comienzo del aprendizaje.

## Opciones a favor de una elección

Estas opciones se apoyan en resultados de investigación y dependen, por una parte, de elecciones ideológicas. Ellas se basan en la pregunta “¿Cómo aprenden los alumnos?”.

1) *Los conocimientos no se apilan, no se acumulan*, sino que pasan de estados de equilibrio a estados de desequilibrio, en el transcurso de los cuales los conocimientos anteriores son cuestionados. Una nueva fase de equilibrio corresponde entonces a una fase de reorganización de los conocimientos, donde los nuevos saberes son integrados al saber antiguo, a veces modificado (cf. Piaget).

Así, un nuevo saber puede cuestionar las concepciones del alumno originadas por un saber anterior: por ejemplo, el estudio de los decimales debería conducir al alumno a cuestionar la idea de que la multiplicación “agrandar” siempre (idea que él ha podido elaborar estudiando los naturales).

Del mismo modo, un saber adquirido puede hacerse fracasar fácilmente aun ante mínimas modificaciones de las variables de la situación: así, G. Vergnaud (1981) ha mostrado que la “noción de adición” o las estructuras aditivas no son totalmente dominadas hasta muy tarde...

### 2) *El rol de la acción en el aprendizaje*

Piaget también ha subrayado el rol de “la acción” en la construcción de conceptos. Por supuesto, se trata de la actividad propia del alumno que no se ejerce forzosamente en la manipulación de objetos materiales, sino de una acción con una finalidad, problematizada, que supone una dialéctica pensamiento-acción muy diferente de una simple manipulación guiada, tendiente a menudo a una tarea de constatación por parte del alumno... Hay que subrayar aquí el rol de la *anticipación*: la actividad matemática consiste a menudo en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permite anticipar el resultado de una acción no realizada todavía o no actual sobre la cual se dispone de ciertas informaciones.

### 3) *Sólo hay aprendizaje cuando el alumno percibe un problema para resolver...*

... es decir cuando reconoce el nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta. Aquí también podemos recurrir a Piaget, para quien el conocimiento no es ni simplemente empírico (constataciones sobre el medio) ni preelaborado (estructuras innatas), sino el resultado de una interacción sujeto-medio (cf. arriba punto 2). Lo que da *sentido* a los conceptos o teorías son los problemas que ellos o ellas permiten resolver.

Así, es la resistencia de la situación la que obliga al sujeto a acomodarse, a modificar o percibir los límites de sus conocimientos anteriores y a elaborar nuevas herramientas (idea de conflicto cognitivo). Habrá que tener esto en cuenta para la elección de las situaciones.

En la misma perspectiva, se tiende a preferir la motivación propia de la actividad propuesta (dificultad que se desea salvar, franquear) a la motivación externa (necesidades de la vida corriente, observaciones) cuyo interés, sin embargo, no se debe descartar: el problema es entonces percibido como un desafío intelectual.

### 4) *Las producciones del alumno son una información sobre su "estado de saber"*

En particular, ciertas producciones erróneas (sobre todo si ellas persisten) no corresponden a una ausencia de saber sino, más bien, a una manera de conocer (que a veces ha servido en otros contextos) contra la cual el alumno deberá construir el nuevo conocimiento. El alumno no tiene jamás la cabeza vacía: no puede ser considerado como una página en blanco sobre la cual será suficiente imprimir conocimientos correctos y bien enunciados.

### 5) *Los conceptos matemáticos no están aislados*

Hay que hablar más bien de campos de conceptos entrelazados entre ellos y que se consolidan mutuamente: de ahí la idea de proponer a los alumnos campos de problemas que permitan la construcción de estas redes de conceptos que conviene elucidar previamente (tarea que pasa a ser fundamental ...).

### 6) *La interacción social es un elemento importante en el aprendizaje*

Se trata tanto de las relaciones maestro-alumnos como de las relaciones alumnos-alumnos, puestas en marcha en las actividades de formulación (decir, describir, expresar), de prueba (convencer, cuestionar) o de cooperación (ayuda, trabajo cooperativo): idea de conflicto sociocognitivo, sobre todo entre pares.

## **En el triángulo docente-alumnos-problema**

Trataremos de precisar las características de estas relaciones en el cuadro de un aprendizaje que se apoya en la resolución de problemas.

### ***Relación entre la situación-problema y los alumnos:***

– La actividad debe proponer un verdadero *problema por resolver* para el alumno: debe ser comprendido por todos los alumnos (es decir que éstos puedan prever lo que puede ser una respuesta al problema).

- Debe permitir al alumno *utilizar los conocimientos anteriores...*, no quedar desarmado frente a ella.
- Pero, sin embargo, debe ofrecer una *resistencia suficiente* para llevar al alumno a hacer evolucionar los conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a elaborar nuevos (problema abierto a la investigación del alumno, sentimiento de desafío intelectual).
- Finalmente, es deseable que la *sanción (la validación) no venga del maestro, sino de la situación misma*.

### **Relación docente-alumno**

¿Qué percepción tiene el alumno de las *expectativas del maestro*? Las relaciones pedagógicas deben conducir a los alumnos a percibir que les es más conveniente establecer ellos mismos la validez de lo que afirman que solicitar pruebas a los otros.

- Una distinción neta debe ser establecida entre los *aportes del docente y las pruebas que los alumnos aportan*.

### **Relación maestro-situación**

– Le corresponde al maestro ubicar la situación propuesta en el cuadro del aprendizaje apuntado, *distinguir el objetivo inmediato de los objetivos más lejanos*, elegir ciertos parámetros de la situación (idea de “variables didácticas” de la situación).

– *El conocimiento considerado debe ser el más adaptado* para resolver el problema propuesto (desde el punto de vista de los alumnos).

– Le corresponde también observar las incomprendiones, *los errores significativos*, analizarlos y tenerlos en cuenta para la elaboración de nuevas situaciones.

– Le corresponde, en fin, *provocar o hacer la síntesis*.

### **¿Qué problemas elegir? ¿Qué puesta en marcha pedagógica?**

Una precisión ante todo: *el término* “problema” utilizado aquí no se reduce a la situación propuesta (enunciado-pregunta). Se define, más bien, como una terna: situación-alumno-entorno. Sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad: una determinada situación que “hace problema” para un determinado alumno puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibida por este último como un problema). Hay, entonces, una idea de obstáculo a superar. Por fin, el entorno es un elemento del problema, en particular las condiciones didácticas de la resolución (organización de la clase, intercambios, expectativas explícitas o implícitas del docente).

Sin duda conviene diferenciar *los objetivos de la actividad de resolución de problemas*:

– Objetivos de orden “metodológico”: en una palabra, “aprender a resolver problemas, a investigar”. El objetivo está, de alguna manera, en la actividad misma (cf. práctica del “problema abierto” descrito por el IREM de Lyon);

– Objetivos de orden “cognitivo”: se apunta a un conocimiento (noción, algoritmo) a través de la actividad de resolución de problemas. Se puede, entonces, desde este punto de vista, distinguir entre los problemas que se sitúan en la fuente de un nuevo aprendizaje y aquellos que se utilizan como problemas de resignificación.

Desde esta última óptica, se pueden considerar algunas cuestiones que se le plantean al maestro respecto de un conocimiento dado:

– Elección de enseñar una determinada concepción del conocimiento considerado (problema de transposición didáctica): ¿cuáles son las concepciones tomadas en cuenta (estado actual de este conocimiento, de su enseñanza, estados anteriores, evolución histórica, diferentes aspectos): cuestiones de epistemología; cuáles son las concepciones posibles con los alumnos de un determinado nivel de enseñanza en relación con los niveles precedentes y siguientes?, ¿de qué tipo de saber se trata (formal, descriptivo u operativo, funcional)?

– Elección de la situación o más bien de la serie de situaciones a proponer a los alumnos. La idea de obstáculo es aquí importante: sin los conocimientos anteriores adecuados para resolver el problema no hay

interés por movilizar una nueva herramienta. La elección es difícil: es necesario no desmovilizar al alumno con una dificultad demasiado grande ni dar la impresión de “derribar puertas abiertas con una excavadora”.

– Elección de una puesta en marcha pedagógica. No hay soluciones tipo, pero se puede anticipar con la mayor parte de los didactas actuales una estrategia de referencia que comprenda varias etapas: investigar individualmente y/o en grupos, formular oralmente o por escrito, validar, institucionalizar (identificación del saber, convenciones para el lenguaje, las notaciones), evaluar, proceso que puede extenderse en varias sesiones e incluso utilizar varias situaciones problemas.

---

## BIBLIOGRAFÍA

- Audigier, M. N. y Colomb, J.**, “Enquête sur l’enseignement des mathématiques á l’école elementaire”, París, INRP, 1979.
- Brousseau, G.**, “Les obstacles epistemologiques et les problèmes d’enseignement”, *Recherches en didactique des mathématiques* (La Pensée Sauvage), 1983, n°4.2., pág. 170.
- Dahan-Dalmedico, A., y Peiffer, J.**: *Une histoire des mathématiques*, París, Le Seuil p. 9.
- Equipe math. INRP**: “Comment font-ils? L’écolier et le problème de mathématiques”, *Rencontres Pédagogiques*, París, 1984, n° 4.
- ERMEL**: “Apprentissages mathématiques á l’école elementaire” cycle moyen (SERMAP-HATIER), 3 tomos, 1982.
- Irem de Lyon**, “La pratique du problème ouvert”, Universidad Claude Bernard, Villeurbanne, s/f.
- Vergnaud, G.**, “Quelques orientations theoriques et methodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques”, *Recherches en didactique des mathématiques* (La Pensée Sauvage), 1981, n. 2.2., pág. 220.